Q11 Aufgaben Geometrie

1. Gegeben sind die Punkte A(2|2|2), B(2|2|0) und C(-1|5|0).
   a) Zeichne das Dreieck in ein Koordinatensystem und zeige mit dem Skalarprodukt, dass das Dreieck bei B rechtwinklig ist. Ergänze später alle weiteren Punkte und die Pyramide!
   b) Wie kann man die Rechtwinkligkeit des Dreiecks ABC mit seinen Seitenlängen beweisen?
   c) Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks ABC auf zwei verschiedene Arten!
   d) Berechne die Innenwinkel des Dreiecks mit dem Skalarprodukt. Überprüfe das Ergebnis mit Hilfe der Sinus- bzw. Kosinusformel aus der Trigonometrie!
   e) Berechne die Höhe h_b des Dreiecks mit der normalen Formel für den Flächeninhalt.
   f) Berechne die Höhe h_b des Dreiecks mit Hilfe einer trigonometrischen Funktion!
   g) Berechne die Seitenmitten M_a, M_b. M_c des Dreiecks! Zeige durch Beweis der Gleichung $\overrightarrow{M_a M_c} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$, dass folgender Satz gilt: „Die Verbindungsstrecke der Seitenmitten zweier Dreiecksseiten ist zur dritten Seite parallel und halb so lang wie diese!“ Wie müssten die weiteren Gleichungen lauten?
   h) Berechne den Schwerpunkt S des Dreiecks ABC mit der Formel: $\vec{S} = \frac{1}{3}(\vec{A} + \vec{B} + \vec{C})$ und zeige durch Beweis der Gleichung $\overrightarrow{M_b S} = \frac{1}{3}\overrightarrow{M_b B}$, dass folgender Satz gilt: „Der Schwerpunkt eines Dreiecks teilt jede Schwerelinie im Verhältnis 2:1“. Wie müssten die weiteren Gleichungen lauten?

   Grundwissen: Der Schwerpunkt eines Dreiecks ist der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden!

   i) Für welchen Punkt D ist M_b der Mittelpunkt der Strecke [BD]?
   j) Zeige, dass das Viereck ABCD ein Rechteck ist. Wie hätte man den Punkt D auch direkt aus A,B und C berechnen können?
   k) Zeige, dass die Pyramide $ABCDS_k$ mit $S_k(k|k+3|1)$ für alle $k \neq 0,5$ eine gerade Pyramide ist, dass also der Punkt S_k stets senkrecht über dem Mittelpunkt M des Rechteckes steht. Was lässt sich über die Lage alle Punkte S_k sagen?
   l) Berechne das Pyramidenvolumen auf zwei verschiedene Arten!
   Im folgenden sei $k = -8$.
   m) Berechne den Neigungswinkel der Seitenkanten der Pyramide gegen die Grundfläche!
   n) Wie groß sind die Winkel zwischen den Seitenflächen und der Grundfläche? Berechne auf zwei Arten!
   o) Berechne den Oberflächeninhalt der Pyramide.
   p) Für welches k ergibt sich eine Pyramide mit dem gleichen Volumen wie für $k = -8$?
   q) Bestimme den Mittelpunkt einer Kugel, so dass alle Punkte der Pyramide auf der Kugel liegen. Gib auch den Radius an.

2. Gegeben sind die Punkte A(1|2|3), B(4|-1|9) und C(7|-7|3).
   a) Beschreibe den Unterschied zwischen dem Ortsvektor $\vec{A}$ und dem Verbindungsvektor $\overrightarrow{AB}$ anhand einer Zeichnung.
   b) Bestimme die Koordinaten des Mittelpunkts M der Strecke [AB].
   c) Die Punkte P und Q teilen die Strecke [AB] in drei gleiche Teile. Berechne ihre Koordinaten.
   d) Berechne die Länge der Strecke [BC].
   e) Berechne die Koordinaten des Schwerpunktes im Dreieck ABC.
   f) Welcher Innenwinkel des Dreiecks ABC ist der größte?
   g) Gib die Koordinaten eines Punktes D an, so dass das Viereck ABCD ein Parallelogramm wird.

3. Gegeben sind die Punkte A(-7|-3|2), B(8|9|18), C(23|-3|2) und D(8|-15|-14).
   a) Zeige, dass das Viereck ABCD eine Raute ist.
   b) Bestimme den Umfang und den Flächeninhalt der Raute ABCD.
   c) Bestimme das Symmetriezentrum der Raute ABCD.
   d) Die Raute ABCD wird durch eine zentrische Streckung mit dem Zentrum A und dem Streckungsfaktor $k = 1{,}5$ zentrisch gestreckt. Wie verändern sich die in b) berechneten Werte für den Umfang und den Flächeninhalt?

4. Gegeben sind die Punkte A(1|2|0), B(-1|-3|0), C(3|0|2) und S(-3|3|8).
   a) Berechne alle Seitenlängen des Dreiecks ABC, den Innenwinkel bei A und die Fläche.
   b) Spiegle nun den Punkt B am Mittelpunkt M der Strecke [AC] auf den Punkt D.
   c) Berechne das Volumen V der Pyramide mit Grundfläche ABCD und Spitze S.
   d) Die Pyramide wird nun am Punkt S als Streckungszentrum mit Streckungsfaktor 3 gestreckt. Berechne nur den Bildpunkt A’ des Punktes A und gib das Volumen V’ der vergrößerten Pyramide ohne weitere Punktberechnung an.
   e) Für welchen Wert von c steht die Verbindungsstrecke von S mit P(2|c|1) senkrecht auf der Strecke [AC]?

5. Stelle eine Koordinatengleichung für die Kugel um M(1|2|3) mit Radius 9 auf und bestimme k so, dass der Punkt Q(8|6|k) auf der Kugelfläche liegt.